Elektrická impedance/NMgr

> **Tento článek je určen pro studenty navazujícího magisterského studia v oboru *Nutriční terapeut***
> Prosíme, neprovádějte věcné editace, nemáte-li potřebnou kvalifikaci.
> Editujte s rozvahou. Věcné změny nejprve projednejte v diskusi.

Elektrická impedance je rozšířením pojmu elektrický odpor na situace, kdy prostředím prochází střídavý elektrický proud. Nejjednodušším pohledem na impedanci je ten, že se jedná o odpor kladený střídavému proudu. Jednotkou impedance je Ohm *Ω*, obvykle se značí písmenem **Z**. Je-li impedance připojena k napětí *U* a protéká-li jí proud *I*, je její hodnota dána Ohmovým zákonem:

$$Z = \frac{U}{I}$$

Impedance elektrických prvků

Základními elektrickými prvky jsou **rezistor** , **kapacitor (kondenzátor)** a **induktor (cívka)**. Základní vlastností rezistoru je elektrický odpor, základní vlastností kapacitoru(kondenzátoru) je kapacita a základní vlastností induktoru(cívky) je indukce. Jde pochopitelně o idealizované modely, pro zdůraznění tohoto faktu se používají tyto termíny a nikoliv technické názvy odpor, kondenzátor a cívka.

Při výpočtu impedancí se obvykle nepoužívá frekvence *f*, ale kruhová frekvecne *ω* určená vztahem:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Impedance rezistoru

Impedance samotného rezistoru se nazývá rezistance, značí se *R*. Hodnota rezistance nezávisí na frekvenci.

Impedance kapacitoru

Impedance kapacitoru se nazývá **kapacitance**, značí se obvykle X_C. Kapacitance je nepřímo úměrná kapacitě *C* kapacitoru a nepřímo úměrná frekvenci *f* přiloženého napětí:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Impedance induktoru

Impedance induktoru se nazývá **induktance**, značí se obvykle X_L. Induktance je přímo úměrná indukčnosti *L* induktoru a přímo úměrná frekvenci *f* proudu protékajícího induktorem:

$$X_L = \omega L$$

Impedance sériového zapojení rezistoru a kapacitoru

Impedance nelze zcela snadno sčítat, pro impedanci *Z* sériového zapojení rezistoru *R* a kapacitoru *C* platí:

$$Z = \sqrt{R^2 - \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

Impedance paralelního zapojení rezistoru a kapacitoru

Vztah pro impedanci *Z* paralelního zapojení rezistoru a kapacitoru má poměrně složitý tvar, stojí však za pozornost, protože paralelní zapojení rezistoru a kapacitoru je často používaným modelem impedance tkáně:

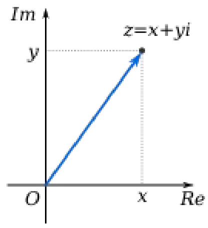
$$Z = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 C^2 R^4}}{\omega^2 C^2 R^2 + 1}$$

Komplexní vyjádření impedance

Výše uvedené vztahy lze vyjádřit velmi elegantně pomocí komplexních čísel. Pro spojování impedancí pak platí vztahy známé pro spojování stejnosměrných odporů. Pro odlišení komplexní impedance od absolutní hodnoty impedance se komplexní impedance označuje stříškou: $\hat{Z}$

Komplexní čísla

Komplexní čísla jsou mimořádně užitečnou matematickou konstrukcí. Představme si kvadratickou rovnici:



Znázornění komplexního čísla v Gaussově rovině

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Podle vztahů pro výpočet kořenů kvadratické rovnice zjistíme, že její kořeny jsou definovány vztahem:

$$x_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$$

Na střední škole se obvykle učí, že odmocnina ze záporného čísla nelze vypočítat, tedy že takováto rovnice nemá řešení. Výraz lze upravit tak, aby v něm figurovala pouze odmocnina z mínus jedné:

$$x_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podobně lze upravit vztah pro řešení každé kvadratické rovnice, která má záporný diskriminant. Zavádí se symbol **komplexní jednotka *i*** (v elektrotechnice a v teorii signálů se obvykle používá symbol *j*, aby se důsledně odlišil od elektrického proudu) definovaná vztahem:

$$i := \sqrt{-1}$$

Komplexní jednotka má jednu velmi zajímavou vlastnost:

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

Řešení rovnice pak lze psát ve tvaru:

$$x_1 = \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_2 = \frac{-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Čísla x_1 a x_2 jsou komplexními čísly. Ta jejich část, která není násobkem komplexní jednotky, se nazývá **reálná část komplexního čísla**, ta jejich část, která je násobkem komplexní jednotky, se nazývá **imaginární část komplexního čísla**.

Na komplexní čísla se lze dívat i jinak, jde o součet dvou reálných čísel, z nichž jedno z nich je vynásobeno komplexní jednotkou. Součet lze považovat za formální, protože ryze reálné a ryze imaginární číslo nelze přímo sečíst. Tím se dostáváme k abstraktnějšímu pohledu na komplexní čísla jako na dvojici reálných čísel s nějakým způsobem definovanými operacemi sčítání, násobení a dělení. Obecně se takové komplexní číslo *z* v **algebraickém tvaru** zapíše jako:

$$z = a + i \cdot b$$

, kde *a* a *b* jsou reálná čísla.

Když už máme dvojici čísel, můžeme ji pokládat za bod v rovině. Taková rovina se skutečně používá, nazývá se Gaussova rovina komplexních čísel. Na každé komplexní číslo se pak můžeme dívat jako na vektor v rovině začínající v počátku, jehož první souřadnicí je reálná část a druhou souřadnicí je imaginární část. Vektor v rovině lze však vyjádřit i pomocí absolutní hodnoty a úhlu φ, který svírá s kladným směrem vodorovné osy. K takovémuto vyjádření se používají dva ekvivalentní zápisy.

Goniometrický tvar komplexního čísla *z*:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

a **exponenciální tvar** komplexního čísla *z*:

$$z = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Hodnoty jsou navzájem snadno převoditelné, pro číslo *z=a+ib* platí zejména:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pro počítání s komplexními čísly platí jednoduchá pravidla:

- $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
- $(a+ib)\cdot(c+id)=ac+ibc+iad+i^2bd=(ac-bd)+i(bc+ad)$

Fázory

Prochází-li induktorem resp. kapacitorem harmonický elektrický proud, dochází mezi napětím a proudem k fázovému posunu, tj. napětí a proud dosahují svého maxima v různých okamžicích. Fázový posun může být jen 0-360°, takže se přímo nabízí využít k popisu tohoto děje komplexních čísel. Jednu z hodnot napětí nebo proud zvolíme za výchozí, tedy její fáze bude nulová, u druhé pak uvedeme fázový posuv včetně znaménka. Komplexně zapsané hodnoty se obvykle označují jako fázory a v zápise se nad nimi dělá stříška: $\hat{U}$, $\hat{I}$ a $\hat{Z}$. I ve fázorech (ve fázorovém prostoru) platí Ohmův zákon, ovšem je třeba dbát toho, že početní úkony jsou prováděny s komplexními čísly:

$$\hat{Z}=\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

Komplexní rezistance

Na rezistanci nedochází k fázovému posunu mezi napětím a proudem, tedy i fázový posuv komplexní rezistance bude nulový:

$$\hat{R}=R$$

Komplexní kapacitance

Na komplexní kapacitanci se napětí spožďuje o 90° za proudem, komplexní kapacitance tedy bude mít fázi -90°. Ve složkovém tvaru to znamená, že komplexní kapacitance bude ryze imaginární se záporným znaménkem:

$$\hat{X}_C=-i\cdot\frac{1}{\omega C}$$

Komplexní induktance

Na komplexní induktanci napětí předbíhá o 90° proud, komplexní induktance bude mít tedy fázi 90°. Ve složkovém tvaru to znamená, že komplexní kapacitance bude ryze imaginární s kladným znaménkem:

$$\hat{X}_L=i\cdot\omega L$$

Komplexní impedance sériového zapojení rezistoru a kapacitoru

Sériové zapojení impedancí znamená, že se impedance sčítají, tvar je tedy jednoduchý:

$$\hat{Z}=\hat{R}+\hat{X}_C=R-i\cdot\frac{1}{\omega C}$$

Komplexní impedance paralelního zapojení rezistoru a kapacitoru

Paralelní zapojení impedancí vede ke složitějšímu tvaru:

$$\hat{Z}=\frac{\hat{R}\cdot\hat{X}_C}{\hat{R}+\hat{X}_C}$$

Po dosatení a úpravách má komplexní impedance následující tvar:

$$\hat{Z}=\frac{R}{\omega^2C^2R^2+1}-i\cdot\frac{\omega CR^2}{\omega^2C^2R^2+1}$$

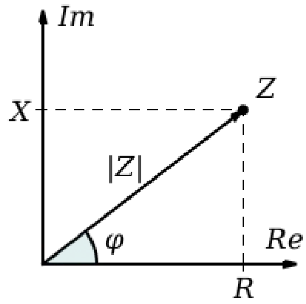
Grafické znároznění impedance

Fázorový diagram

Fázorový diagram je grafickým znázorněním impedance při jedné jediné frekvenci. Nejde o nic jiného, než o zakreslení komplexní impedance jako vektoru v rovině, který má jako x-ovou souřadnici reálnou část impedance a jako y-ovou souřadnici má imaginární část impedance. Fázorový diagram umožňuje snadno provádět např. grafické sčítání impedancí nebo velmi názorně hodnotit fázové poměry.

Impedanční spektrum

Při měření impedance je poměrně často znát závislost impedance na frekvenci, protože v jeho tvaru se může ukrývat hledaná informace např. hydrataci tkáně nebo o podílu tuku.



Fázorový diagram impedance s reálnou a kladnou imaginární složkou.

Matematicky je vlastně impedanční spektrum komplexní funkcí:

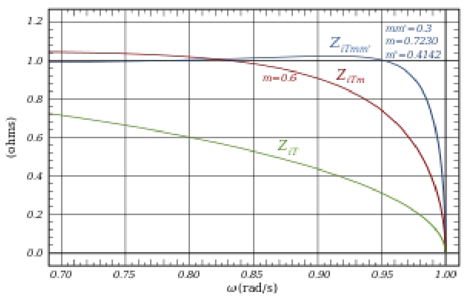
$$\hat{Z} = \hat{Z}(\omega)$$

Jisným technickým problémem je grafické znázornění, protože bodem takovéhoto grafu je dvojice reálného a komplexního čísla. Existuje několik způsobů, jak se s tímto vyrovnat.

Reálné a imaginární spektrum

Impedanci lze napsat jakou součet dvou reálných čísel - rezistance *R* a reaktance *X*, zle v případě frekvenční závislosti postupovat analogicky i pro impedanční spektrum a napsat impedanci jako součet dvou reálných funkcí:

$$\hat{Z}(\omega) = R(\omega) + i \cdot X(\omega)$$



Ukázka tří amplitudových impedančních spekter.

Protože *R(ω)* i *X(ω)* jsou reálné funkce, lze jejich graf snadno vykreslit. Spektrum *R(ω)* se nazývá reálné impedanční spektrum, spektrum *X(ω)* se nazývá imaginární impedanční spektrum. Tato spektra se v praxi používají jen poměrně málo, protože vizuálně je z nich zřejmých méně informací než z dalších modifikací.

Amplitudové a fázové spektrum

Aplitudové a fázové spektrum vychází z exponenciálního resp. goniometrického tvaru komplexního čísla:

$$\hat{Z}(\omega) = Z(\omega) \cdot e^{-i\varphi(\omega)}$$

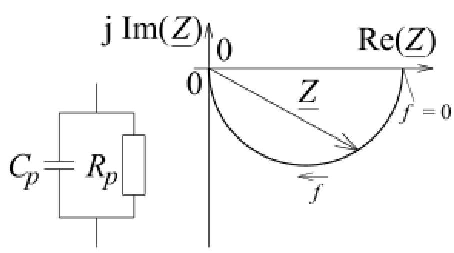
Reálná funkce *Z(ω)* se nazývá amplitudové impedanční spektrum, reálná funkce *φ(ω)* se nazývá fázové impedanční spektrum. Amplitudové spektrum lze snadno interpretovat jako celkovou impedanci na konkrétních frekvencích, fázové spektrum pak doplňuje informaci o tom, k jakému fázovému posunu mezi napětím a proudem dojde.

Někdy se používá výkonové spektrum, jehož název je odvozen od zpracování napěťových signálů. Ve výkonovém spektru je zobrazována frekvenční závislost druhé mocniny amplitudy.

Frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika je dvojrozměrný graf, v němž na vodorovnou osu vynášíme reálnou složku impedance a na svislou osu imaginární složku impedance. V případě obecné teorie systému se graf nazývá Nyquistův graf. V případě bioimpedanční analýzy se obvykle vynáší záporně vzatá imaginární složka a hovoří se o Cole-Cole diagramu.

Cole-Cole diagram je znázornění frekvenční závislosti komplexní permitivity na frekvenci. Pojmenován je po biofyzicích bratrech K.S. a R.H. Coleových, kteří jej ve 30. letech použili při studiu komplexní impedance tkání.



Frekvenční charakteristika (Nyquistův graf) paralelního spojení rezistoru a kapacitoru, tedy nejjednoduššího modelu pasivních elektrických vlastností organismu.

Odkazy

Související články

- Vedení elektrického proudu tělem
- Měření proudu
- Měření odporu
- Měření napětí

Zdroj

- KUBATOVA, Senta. *Biofot* [online]. [cit. 2011-01-31]. <https://uloz.to/!CM6zAi6z/biofot-doc>.